



TITLE:

理想確率関数の2時間相関関数 (乱流とNavier-Stokes方程式)

AUTHOR(S):

土井, 正明; 神戸, 良一; 今村, 勤; 谷内, 俊弥

CITATION:

土井, 正明 ...[et al]. 理想確率関数の2時間相関関数 (乱流とNavier-Stokes方程式). 数理解析研究所講究録 1979, 354: 140-165

ISSUE DATE:

1979-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104441>

RIGHT:

理想確率関数の2時間相関関数

兵医大 土井 正明

関学大 理 神戸 良一

今村 勤

名大 理 谷内 俊弥

§ I. 序論

流体及びプラズマの統計現象を取り扱うのに有効な方法として, Wiener-Hermite 展開¹⁾⁻⁵⁾がある。即ち, 未知の確率関数を理想確率関数の Hermite 関数で展開する方法である。この方法の利点として, (1) Gauss 分布に近い確率関数を扱うのに適している。(2) 時間に依存する理想確率関数の導入によって, 切断の近似を良く保ちながら, 少数項の展開形を用いることが出来る場合が多い。etc. が挙げられる。

従来, Wiener-Hermite 展開は全て同時刻相関関数を対象にしてきた。乱流の動的性質を研究するためには, 2時刻相関関数を研究する必要がある。Wiener-Hermite 展開の理論では, 速度場が Gauss 分布に近い場合, 速度場の2時間相関

関数を求める問題は理想確率関数の2時間相関関数を求める問題に帰着出来る。この論文の目的はある時間に渡る理想確率関数の2時間相関関数を取り扱う方法を確立することにある。ここで得られた方法を pseudo-3次元 electrostatic plasma 乱流及び2次元等方非圧縮乱流に応用した。上の2つの model において、時間 t に関してガウス型減衰則 $\exp[-\frac{1}{2}t^2 \omega_k^2]$ が成立している波数領域が存在することを知った。ここで ω_k^2 は理想確率関数の時間発展を特徴づける関数 L の関数である。なお2次元乱流の model では $E(k) \sim k^{-2}$ というエネルギー・スペクトルが準安定な波数領域が存在することが数値計算により得られた。§2では Wiener-Hermite 展開の理論の要約を述べ、§3では ideal random function の2時間相関関数の理論を述べる。§4で pseudo 3-dim. electrostatic plasma turbulence に §3 の方法を応用した結果を述べる。§5で2次元等方非圧縮乱流を考察し、準安定なエネルギー・スペクトル及びそのようなスペクトルを持つ波数領域での、速度場の2時間相関関数に関する結果を述べる。

§ II. 時間に依存する理想確率関数による Wiener-Hermite 展開
 簡単に Wiener-Hermite 展開の理論を整理して述べる。
 応用上、波数空間で理論を構成する。理想確率関数 $a(k)$ を
 特性関数か

$$\langle \exp \left[i \int dk z(-k) a(k) \right] \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} \int dk z(-k) z(k) \right] \quad (2-1)$$

である確率関数と定義する。ここに k は 3 次元の波数ベクトルである。ideal random function $a(k; t)$ の Wiener-Hermite 関数を

$$H^{[N]}(k_1, \dots, k_N) \equiv \exp \left[\frac{1}{2} \int dk a(-k) a(k) \right]$$

$$\cdot \prod_{j=1}^N \left[-\frac{\delta}{\delta a(-k_j)} \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \int dk a(-k) a(k) \right] \quad (2-2)$$

で定義する。但し $\delta / \delta a(k)$ は汎関数微分である。 $H^{[N]}$ の積の統計的平均値は

$$\begin{aligned} & \langle H^{[N_1]}(k_{[1,1]}, \dots, k_{[1,N_1]}) \times \dots \times H^{[N_m]}(k_{[m,1]}, \dots, k_{[m,N_m]}) \rangle \\ &= \sum \prod \delta[k_{[a,p]} + k_{[b,q]}] \quad (2-3) \end{aligned}$$

右の全ての
 可能な分割
 についての和

全ての $[a, p]$ を
 $a+b$ の条件の
 もとで、対 $[a, p]$
 $[b, q]$ に分け
 各対についての積

である。右辺の詳しい意味は文献4)を参照のこと。例を挙げると、

$$\langle H'''(lk) H'''(l) \rangle = \delta(lk+l)$$

$$\begin{aligned} \langle H'''(lk) H'''(l) H^{(2)}(P, q) \rangle &= \delta(lk+P) \delta(l+q) \\ &+ \delta(lk+q) \delta(l+P) \end{aligned}$$

etc.

である。ideal random function $a(lk:t)$ の時間発展を記述する式として

$$\partial_t H'''(lk:t) = \int dlk' L(lk-lk', lk':t) H^{(2)}(lk-lk', lk':t) \quad (2-4)$$

を仮定する。ここに L は通常の関数で、対称性

$$L(P, q) = L(q, P) \quad (2-5)$$

を持つ。これは $H^{(2)}(lk, l)$ の対称性の反映である。

任意の時刻で ideal random function としての性質を持つために、 $L(P, q)$ に対して、条件

$$L(lk, l) + L(l, -lk-l) + L(-lk-l, lk) = 0 \quad (2-6)$$

が要求される。⁵⁾ 確率関数は Wiener-Hermite 展開することから出る^{2) 5)}。特に、確率関数が Gauss 分布に近い時、展開の最初の数項で良く近似することから出る。それは、Gauss 分布に相当する主要項と補正項という形を持つ。

即ち、空間の一様性を仮定するとき、任意の確率関数 $U(k:t)$ は

$$\begin{aligned}
 U(k:t) = & K^{(1)}(k:t) H^{(1)}(k:t) \\
 & + \int dk' K^{(2)}(k-k', k':t) H^{(2)}(k-k', k':t) \\
 & + \dots \dots \dots \quad (2-7)
 \end{aligned}$$

と展開出来る。

§Ⅳ. 理想確率関数の2時間相関関数

時刻 $t=0$ での ideal random function $Q(k:t=0)$ を時刻 t での ideal random function $Q(k:t)$ で Wiener-Hermite 展開する。

$$\begin{aligned}
 H^{(1)}(k:0) = & \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dk_1 \dots dk_N C^{[N]}(k: k_1, \dots, k_N: t) \\
 & \times H^{[N]}(k_1, \dots, k_N: t) \quad (3-1)
 \end{aligned}$$

係数 $C^{[N]}$ は、(2-3) より、

$$\begin{aligned}
 C^{[N]}(k: k_1, \dots, k_N: t) = & \\
 = & \langle H^{[N]}(-k_1, \dots, -k_N: t) H^{(1)}(k: 0) \rangle \quad (3-2)
 \end{aligned}$$

で与えられる。

$C^{[N]}$ の時間発展を記述する式を求める。Wiener-Hermite 汎関数の汎母関数⁴⁾は

$$G[z(\cdot), a(\cdot; t)] \equiv \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dk_1 \cdots dk_N H^{[N]}(k_1, \dots, k_N) \\ \times z(-k_1) \cdots z(-k_N) \\ = \exp \left[\int dk \left[z(-k) a(k; t) - \frac{1}{2} z(-k) z(k) \right] \right] \quad (3-3)$$

である。上式を z に関して微分をとり、 z に関する汎関数微分を使い、 G に関して閉じた形をつくり、 z に関して係数比較を行くと、 $H^{[N]}$ の時間発展の方程式は

$$\dot{H}^{[N]}(k_1, \dots, k_N) \\ = \sum_{i=1}^N \int dk' L(k_i - k', k') H^{[N+1]}(k', k_i - k', k_1, \dots, \widehat{k_i}, \dots, k_N) \\ - 2 \sum_{i < j} L(-k_i, -k_j) H^{[N-1]}(k_i + k_j, k_1, \dots, \widehat{k_i}, \dots, \widehat{k_j}, \dots, k_N) \quad (3-4)$$

である。但し $N \geq 2$ である。 $N=1$ の時は (2-4) である。ここに、 $\widehat{k_i}$ は変数の中で k_i を除外することを意味する。 $C^{[N]}$ に対する時間発展の方程式は、(3-2) と (3-4) 及び (2-4) を使うと

$$\dot{C}^{(1)}(k; k_1) = \int dk' L(-k_1 - k', k') C^{[2]}(k; -k', k' + k_1) \quad (3-5)$$

及び

$$\begin{aligned}
 & \dot{C}^{[N]}(lk: lk_1, \dots, lk_N) \\
 &= \sum_{i=1}^N \int dlk' L(-lk_i, -lk', lk) C^{[N]}(lk: -lk', lk + lk_i, lk_1, \dots, \widehat{lk_i}, \dots, lk_N) \\
 & - 2 \sum_{i < j} L(lk_i, lk_j) C^{[N-1]}(lk: lk_i + lk_j, lk_1, \dots, \widehat{lk_i}, \dots, \widehat{lk_j}, \dots, lk_N)
 \end{aligned} \quad (3-6)$$

となる。但し $N = 2, 3, 4, \dots$ である。

ここで Fock space を考之よう。直交完全系 $\{ |lk_1, \dots, lk_N\rangle \}$ を導入する。すなわち,

$$\begin{aligned}
 & \langle lk_1, \dots, lk_N | lk'_1, \dots, lk'_N \rangle \\
 &= \delta_{NM} \cdot \frac{1}{N!} \sum_P \delta(lk_1 - lk'_{i_1}) \times \dots \times \delta(lk_N - lk'_{i_N}) \quad (3-7)
 \end{aligned}$$

より

$$\sum_{N=0}^{\infty} \int dlk_1 \dots dlk_N |lk_1, \dots, lk_N\rangle \langle lk_1, \dots, lk_N| = 1 \quad (3-8)$$

である。今成分が $C^{[N]}(lk: lk_1, \dots, lk_N)$ である状態ベクトル $|C(t)\rangle$ を考之る。すなわち

$$\begin{aligned}
 |C(t)\rangle &= \sum_{N=0}^{\infty} \int dlk_1 \dots dlk_N C^{[N]}(lk: lk_1, \dots, lk_N; t) \\
 & \times |lk_1, \dots, lk_N\rangle \quad (3-9)
 \end{aligned}$$

従って, (3-7) より,

$$C^{[N]}(k: k_1, \dots, k_N; t) = \langle k_1, \dots, k_N | C(t) \rangle \quad (3-10)$$

である。 $t=0$ の時, $C^{[N]}$ は

$$C^{[1]}(k: p: 0) = \delta(k - p) \quad (3-11)$$

$$C^{[N]}(k: k_1, \dots, k_N: 0) = 0 \quad (3-12)$$

となることは容易に分るであらう。状態ベクトル $|C(t)\rangle$ の時間発展の方程式は (3-9), (3-6), (3-10) より

$$\begin{aligned} & \partial_t |C(t)\rangle \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N \int \left[\prod_{j=1}^N dk_j \right] dk' |k_1, \dots, k_N\rangle \mathcal{L}(-k_i - k', k') \\ & \quad \times \langle -k', k' + k_i, k_1, \dots, \widehat{k_i}, \dots, k_N | C(t) \rangle \\ & - 2 \sum_{N=1}^{\infty} \int \left[\prod_{j=1}^N dk_j \right] \sum_{i < j} |k_1, \dots, k_N\rangle \mathcal{L}(k_i, k_j) \\ & \quad \times \langle k_i + k_j, k_1, \dots, \widehat{k_i}, \dots, \widehat{k_j}, \dots, k_N | C(t) \rangle \end{aligned} \quad (3-13)$$

となる。ここで operator $A(t), B(t)$ を

$$A(t) \equiv \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N \int \left[\prod_{j=1}^N dk_j \right] dk' |k_1, \dots, k_N\rangle \mathcal{L}(-k_i - k', k')$$

$$\cdot \langle -|k', |k' + |k_i, |k_1, \dots, \widehat{|k_i}, \dots, |k_N \rangle \quad (3-14)$$

よって.

$$B(t) \equiv 2 \sum_{N=1}^{\infty} \int \left[\prod_{j=1}^N d|k_j \right] \sum_{i < j} |k_1, \dots, |k_N \rangle L(|k_i, |k_j)$$

$$\cdot \langle |k_i + |k_j, |k_1, \dots, \widehat{|k_i}, \dots, \widehat{|k_j}, \dots, |k_N \rangle \quad (3-15)$$

と定義すると, 上式(3-13)は

$$\partial_t |C(t)\rangle = A(t) |C(t)\rangle - B(t) |C(t)\rangle \quad (3-16)$$

と書ける。 $A(t)$ は N -state を $(N-1)$ -state へ変換する operator であり, $B(t)$ は N -state を $(N+1)$ -state へ変換する operator である。 $A(t)$ と $B(t)$ との commutator $[A(t), B(t)] \equiv A(t)B(t) - B(t)A(t)$ は N -state をそれ自身へ移す operator である。

ここで関数 L が 時間に依存し方いか, 又は非常にゆっくりと変化する場合にはついでのみ考える。実際プラズマ乱流及び2次元乱流に適用する時, この条件を満たしている。

従って, operator $A(t), B(t)$ の時間依存性を無視する。以下, A, B と書くことにする。従って, (3-16)の解は形式的に

$$|C(t)\rangle = e^{[A+B]t} |C(0)\rangle \quad (3-17)$$

と書ける。今任意の operator α, β に対して,

$$\exp[\alpha t + \beta t] = e^{\alpha t} e^{\beta t} e^{f t^2} e^{g t^3} e^{h t^4} \dots \quad (3-18)$$

と展開出来る。但し f, g, h は

$$f \equiv \frac{1}{2} (\beta | \alpha)$$

$$g \equiv -\frac{1}{3} (\beta, \beta | \alpha) - \frac{1}{6} (\alpha, \beta | \alpha)$$

$$h \equiv \frac{3}{8} (\beta, \beta, \beta | \alpha) + \frac{5}{8} (\beta, \alpha, \beta | \alpha) \\ - \frac{1}{2} (\alpha, \beta, \beta | \alpha) + \frac{1}{24} (\alpha, \alpha, \beta | \alpha)$$

そして $(\alpha_1, \dots, \alpha_n | \beta)$ は

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n | \beta) \equiv [\alpha_1, [\alpha_2, [\dots, [\alpha_n, \beta] \dots]]$$

の省略形である。 $[\alpha, \beta]$ が α 及び β の両方と可換のとき,

$$\exp[\alpha t + \beta t] = e^{\alpha t} e^{\beta t} e^{\frac{1}{2} [\beta, \alpha] t^2}$$

という良く知られた formula に一致することは明らかである。

係数 $C'''(|k: P: t)$ は (3-10), (3-11) そして (3-17) より

$$C'''(|k: P: t) = \langle P | e^{t[A-B]} | k \rangle \quad (3-19)$$

と書ける。即ち 1-state 間の期待値の形をしている。

(3-19)において, (3-18)を使うと, (3-14) (3-15) の性質から

$$\begin{aligned}
 C'''(k: p: t) &= \delta(k-p) \exp\left[-\frac{1}{2}t^2 \omega_k^2\right] \\
 &\times \exp\left\{\frac{t^4}{24} \left[-2\omega_k^4 + (AABB)_k\right]\right\} \\
 &\times \{\dots\} \quad (3-20)
 \end{aligned}$$

を得る。ここに

$$\begin{aligned}
 \omega_k^2 &\equiv \langle k | AB | k \rangle \cdot \delta(0)^{-1} \\
 &= 2 \int dP' |L(-P' + k, P')|^2 \quad (3-21)
 \end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned}
 (AABB)_k &\equiv \langle k | AAB B | k \rangle \cdot \delta(0)^{-1} \\
 &= 8 \int dk_1 dk_2 \\
 &\left\{ L(-k-k_1, k_1) L(k_1-k_2, k_2) L(-k_2, k_2-k_1) \right. \\
 &\quad \times L(-k_1, k_1+k_2) \\
 &+ 2 L(-k-k_1, k_1) L(k_1-k_2, k_2) L(k_2-k_1, k_1+k_2) \\
 &\quad \times L(k_2+k, -k_2) \left. \right\} \quad (3-22)
 \end{aligned}$$

である。

今(3-20)式において t^2 の部分が t^4 の部分に比べて、
大きければ、Gauss型減衰則

$$\langle a(k:t) a(p:0) \rangle \simeq \delta(k-p) e^{-\frac{1}{2} t^2 \omega_k^2} \quad (3-23)$$

が近似的に、その時間間隔の間成立していることを意味する。
 t^2 の部分が t^4 の部分に比べて、dominantかどうかは、model
に依存する。これを、プラズマ乱流及び2次元乱流の場合に
応用してみる。

IV. Pseudo 3-dim. Electric Turbulence in magnetized Plasma

pseudo 3-dim. 電場乱流において、Hasegawa & Mima⁸⁾
は電場ポテンシャル ϕ に対して、基礎方程式

$$2[\nabla^2 \phi - \phi] - [(\nabla \phi \times \hat{z})] \nabla^2 \phi = 0 \quad (4-1)$$

を提唱した。ここで \hat{z} は磁場方向の単位ベクトルである。
上式は波数が2以下の時有効である。上式の Gauss型厳密解
は Hasegawa et.al⁸⁾ によって

$$\hat{\phi}(k:t) = \hat{K}''(k) H''(k:t) \quad (4-2)$$

と知られている。 $\hat{\phi}$ は ϕ の Fourier 変換である。

$$\hat{K}^{(u)}(k) = \frac{a}{\sqrt{1+k^2} \sqrt{k^2+b}} \quad (4-3)$$

よして.

$$L(k, \ell) = \frac{a |k \times \ell| \cdot \hat{K}(\ell^2 - k^2) \sqrt{(k+\ell)^2 + b}}{2\sqrt{(k^2+b)(\ell^2+b)}[(k+\ell^2)^2+1][k^2+1][\ell^2+1]} \quad (4-4)$$

ここに a, b は任意定数である。(3-20)式の t^2 の部分から t^4 の部分に比べて dominant かどうかを調べた。

Table 1

$k_y = 0$, $a = 1$, $t^2 \omega_k^2 = 1$ に対する

$$\text{Ratio} = \frac{\left| \frac{t^4}{24} [-2 \omega_k^4 + (AABB)_k] \right|}{\frac{1}{2} \omega_k^2 t^2}$$

$k_x \backslash b$	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
0.2	3.9	0.46	0.15	0.11	0.11	0.13	0.12
0.6	2.0	0.32	0.14	0.12	0.12	0.12	0.12
1.0	1.4	0.27	0.14	0.12	0.12	0.12	0.12

Table 2

table 1 の $\text{ratio} = \frac{1}{4}$ の時の $C''(k:k:t)$

$b \backslash k$	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
0.2	0.97	0.76	0.43	0.32	0.32	0.33	0.34
0.6	0.94	0.68	0.41	0.34	0.34	0.35	0.35
1.0	0.92	0.63	0.41	0.36	0.36	0.36	0.36

$t\omega_n = 1$ において, 波数 k が 1.0 と 1.6 の間で, 各 b に対して, t^4 の部分は t^2 のそれに対して 10% に過ぎないことが Table 1 より分る。Table 2 より, t^4 の部分と t^2 の部分の比が $\frac{1}{4}$ の時, 係数 $C''(k:k:t)$ は, 波数 k が 1.0 から 1.6 の間で, 各 b に対して 30% の減衰を示している。従ってこのモデルでは, Gauss 型減衰則が良く成立している。即ち, (4-2), (4-3), (3-20) から,

$$\langle \hat{\phi}(k:t) \hat{\phi}(p:0) \rangle \simeq \delta(k-p) \times \frac{a^2}{[1+k^2][k^2+b]} e^{-\frac{1}{2} t^2 \omega_n^2} \quad (4-5)$$

である。この結果は, Okuda-Dawson⁹⁾ が計算機によるシミュレーションによる予測と一致している。

§V 2次元等方非圧縮乱流

2次元非圧縮流体において、速度場の Fourier 変換に対する Navier-Stokes 方程式は

$$\begin{aligned} & [\partial_t + \nu k^2] v_i(k; t) \\ &= -i \int dk' k_e \Delta_{ij}(k) v_e(k-k') v_j(k') \end{aligned} \quad (5-1)$$

と書ける。ここで factor $\Delta_{ij}(k)$ は

$$\Delta_{ij}(k) \equiv \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (5-2)$$

である。Einstein の規則を使用した。即ち i と j は 1 から 2 まで和を取る。速度場は連続の方程式

$$k_i v_i(k; t) = 0 \quad (5-3)$$

を満たす。後のために、 v_i のかわりに

$$v_i(k; t) = e^{-\nu k^2 t} u_i(k; t) \quad (5-4)$$

で定義される u_i で考えることにする。

pseudo-vector 型理想確率関数 $H_i(k; t)$ による Wiener-Hermite 展開を考える。即ち

$$\begin{aligned}
U_i(k:t) &= K_{ij}^{(0)}(k:t) H_j^{(0)}(k:t) \\
&+ i \int dk' K_{i\alpha\beta}^{(2)}(k-k', k':t) H_{\alpha\beta}^{(2)}(k-k', k':t) \\
&+ \dots \quad (5-5)
\end{aligned}$$

である。ideal random function の時間発展⁵⁾は

$$\begin{aligned}
\partial_t H_m^{(0)}(k:t) &= i \int dk' L_{m\alpha\beta}(k-k', k':t) \\
&\times H_{\alpha\beta}^{(2)}(k-k', k':t) \quad (5-6)
\end{aligned}$$

で記述されると仮定する。以下 $K^{(n)}$, $H^{(n)}$, $L^{(n)}$ の中の n は省略する。(5-5)式で, 才2項で切ると, $K^{(0)}$, $K^{(2)}$ に対する式は.

$$\begin{aligned}
\dot{K}_{ix}^{(0)}(k:t) &= 2 \int dk' F(k, k') \Delta_{ij}(k) \times \\
&\times k_e \left[K_{e\bar{x}\alpha}^{(2)}(-k', k) K_{j\bar{x}}^{(0)}(k') + K_{e\bar{x}}^{(0)}(k-k') K_{j\bar{x}\alpha}^{(0)}(k'-k, k) \right] \\
&+ 2 \int dk' K_{i\alpha\beta}^{(2)}(k-k', k') L_{\alpha\beta}(-k'-k, -k') \quad (5-7)
\end{aligned}$$

そして,

$$\dot{K}_{its}^{(2)}(-p, -q:t) = -K_{ix}^{(0)}(k:t) L_{\alpha\beta}(-p, -q)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} F(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) \Delta_{ij}(\mathbf{k}) k_l K_{lt}''(-\mathbf{p}; t) K_{js}''(-\mathbf{q}; t) \\
& -\frac{1}{2} F(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}) \Delta_{ij}(\mathbf{k}) k_l K_{ls}''(-\mathbf{q}; t) K_{jt}''(-\mathbf{p}; t) \quad (5-8)
\end{aligned}$$

である。ここで $F(x)$ は $F(x) = e^{2\nu t x}$ であり、

\mathbf{k} は $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ である。

H'' の pseudo-vector 性より、核 K'' は

$$\begin{aligned}
K_{ix}''(\mathbf{k}; t) &= \varepsilon_{ijl} k_j V_{lx}''(\mathbf{k}) \\
&+ \varepsilon_{ljk} k_j V_{il}''(\mathbf{k}) \quad (5-9)
\end{aligned}$$

という形を持つ。連続の式 (5-3) より、 V_{il}'' は

$$V_{il}''(\mathbf{k}) = \Delta_{il}(\mathbf{k}) S(\mathbf{k})$$

という形を持つ。よって、 K'' は

$$K_{ix}''(\mathbf{k}; t) = \varepsilon_{ijx} k_j S(\mathbf{k}) + \varepsilon_{ijl} k_j V_{lx}''(\mathbf{k}) \quad (5-10)$$

となる。今 2 次元乳流を考えているから、 z 軸方向の運動は無いと考える、そして z 方向の異方性より

$$V_{lm}''(\mathbf{k}) = \delta_{l3} \delta_{m3} \tilde{V}(\mathbf{k})$$

として

$$S(\mathbf{k}) = 0$$

を仮定する。従って、 K'' は

$$K_{ix}''(\mathbf{k}; t) = \varepsilon_{ij3} k_j \delta_{x3} \tilde{V}(\mathbf{k}) \quad (5-11)$$

となる。 L_{xts} として

$$L_{xts}(-P, -Q) = \delta_{x3} \delta_{t3} \delta_{s3} L(-P, -Q) \quad (5-12)$$

という形を仮定する。このとき、 $K^{(2)}$ に対する方程式は
(5-12), (5-11) を (5-8) に代入することにより、

$$\begin{aligned} \dot{K}_{its}^{(2)}(-P, -Q) = & -\delta_{t3} \delta_{s3} [\varepsilon_{ij3} k_j \tilde{V}(k) L(-P, -Q) \\ & + \frac{1}{2} F(k \cdot Q) \Delta_{ij}(k) \varepsilon_{j\beta\gamma} q_\beta \varepsilon_{\alpha\gamma} k_\alpha p_\alpha \tilde{V}(p) \tilde{V}(q) \\ & + \frac{1}{2} F(k \cdot P) \Delta_{ij}(k) \varepsilon_{j\alpha\gamma} p_\alpha \varepsilon_{\beta\gamma} k_\beta q_\beta \tilde{V}(p) \tilde{V}(q)] \end{aligned} \quad (5-13)$$

となる。

また軸方向の一様性を仮定すると、 \tilde{V} は

$$\tilde{V}(k) = -i [\delta(k_3) / \sqrt{\delta(0)}] A(k) \quad (5-14)$$

と書ける。今 $L(P, Q)$ として

$$\begin{aligned} L(-P, -Q) = & \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\gamma 3} p_\beta q_\gamma \frac{k \cdot [P - Q]}{k^2} \cdot \frac{\tilde{W}(p) \tilde{W}(q)}{\tilde{W}(k)} \\ & \times G(P, Q, k) \end{aligned} \quad (5-15)$$

を用いる。ここで \tilde{W} は

$$\begin{aligned} \tilde{W}(p) = & \frac{\delta(p_3)}{\sqrt{\delta(0)}} \frac{(-i) p_4}{p [p_1 + p^2]^{1/2}} \\ = & i \frac{\delta(p_3)}{\sqrt{\delta(0)}} W(p) \end{aligned} \quad (5-16)$$

である。 β_1, β_4 は任意定数である。 $G(p, q, k)$ は p, q, k に
関して完全対称である。この G は後に決定される。この L
は、 L に対する制限条件を満たす \tilde{v} とは容易に分る。この L
を (5-13) に代入すると、

$$\begin{aligned} \dot{K}_{its}^{(2)}(-p, -q; t) = & -\frac{1}{2} \delta_{t3} \delta_{s3} \varepsilon_{ij3} k_j \varepsilon_{\alpha\beta} p_\alpha q_\beta \tilde{V}(k) \\ & \times \left\{ \frac{k \cdot p}{k^2} \left[\frac{\tilde{W}(p) \tilde{W}(q)}{\tilde{W}(k)} G(p, q, k) + F(k \cdot p) \frac{\tilde{V}(p) \tilde{V}(q)}{\tilde{V}(k)} \right] \right. \\ & \left. - \frac{k \cdot q}{k^2} \left[\frac{\tilde{W}(p) \tilde{W}(q)}{\tilde{W}(k)} G(p, q, k) + F(k \cdot q) \frac{\tilde{V}(p) \tilde{V}(q)}{\tilde{V}(k)} \right] \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$\Delta_{ij}(k) \varepsilon_{j\alpha\beta} p_\alpha \delta(k_3) = \varepsilon_{ij3} k_j \frac{k \cdot p}{k^2} \delta(k_3)$$

と $K^{(2)}$ の初期条件がゼロであることを考慮すると、
 $K^{(2)}$ の形は、

$$\begin{aligned} \dot{K}_{its}^{(2)}(-p, -q; t) = & -\frac{1}{2} \delta_{t3} \delta_{s3} \varepsilon_{ij3} k_j \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} p_\alpha q_\beta \cdot \\ & \cdot \frac{\delta(p_3) \delta(q_3)}{\delta(0)} \left[\frac{k \cdot p}{k^2} B(-p, -q; t) - \frac{k \cdot q}{k^2} B(-q, -p; t) \right] \end{aligned} \quad (5-17)$$

と書ける。但し、 B は

$$\begin{aligned} \dot{B}(-p, -q; t) = & -A(k) \left[\frac{W(p) W(q)}{W(k)} \cdot G(p, q, k) \right. \\ & \left. + F(k \cdot p) \frac{A(p) A(q)}{A(k)} \right] \end{aligned} \quad (5-18)$$

で与えられる。 $k+k'+q=0$ である。 A に対する
方程式は, (5-7), (5-11), (5-14) 及び (5-17) から

$$\begin{aligned} \dot{A}(k:t) = & \int dk' \delta(k_3') [k^2 \cdot k'^2 - (k \cdot k')^2] \times \\ & \times \left\{ F(-k \cdot k' - k^2) \cdot \frac{k \cdot [k + 2k']}{k^2} \cdot \frac{[k'^2 - k^2]}{(k + k')^2} A(k) B(k', k) \right. \\ & - \frac{1}{2} \frac{[k \cdot (k + 2k')]^2}{k^4} \cdot \frac{W(k + k') W(k)}{W(k)} \\ & \left. + G(k + k', k', k) \cdot B(k + k', -k') \right\} \quad (5-19) \end{aligned}$$

エネルギー・スペクトル $E(k:t) = \int dk_3 \pi k < \psi_1(k) \psi_1(k) >$
 $\delta^{(3)}(0)^{-1}$ は, A 及び B の関数として,

$$E(k:t) = E_1(k:t) + E_2(k:t)$$

と表わされる。但し E_1 及び E_2 は,

$$E_1(k:t) = \pi k^3 e^{-2\nu k^2 t} A(k)^2 \quad (5-20)$$

そして

$$\begin{aligned} E_2(k:t) = & \frac{\pi}{2k} e^{-2\nu k^2 t} \int dk' \delta(k_3') [k^2 k'^2 - (k \cdot k')^2] \\ & \times [(k - k')^2 - k'^2] B(k - k', k':t)^2 \quad (5-21) \end{aligned}$$

である。残された任意関数 G を, B の方程式 (5-18) で

p を十分大, q を固定又はその反対に取ったとき, 右辺が
ゼロになるように決定する。即ち,

$$\begin{aligned}
G(p, q, k) = & -F(p, q) \cdot \frac{w(k)}{w(p)w(q)} \cdot \frac{A(p)A(q)}{A(k)} \frac{k^2}{p^2 + q^2 + k^2} \\
& + [p \rightarrow q, q \rightarrow k, k \rightarrow p] \\
& + [p \rightarrow k, q \rightarrow p, k \rightarrow q] \quad (5-22)
\end{aligned}$$

と取る。

$\nu = 0.01$, $k_{\max} = 12$ に取り, 初期エネルギー・スペクトルとして

$$E_1(k; 0) = \pi k^3 \frac{\beta_4^2}{k^{2\beta_2} [\beta_1 \beta_3 + k^{\beta_3}] [\beta_5 \beta_6 + k^{\beta_6}]} \quad (5-23)$$

を採用して, 数値計算を行い, 準安定なエネルギー・スペクトルを求めた。Fig. 1において, 波数 $1 < k < 6$ において, かなり安定であることが示されている。Fig. 2 及び Fig. 3 では, スペクトルが Fig. 1 のスペクトルに近づく傾向を示している。又 Fig. 4 では, 初期のスペクトルの $k \geq 7$ の減衰を変えても安定性は変わらない。 $k \geq 7$ での急激なスペクトルの上昇は $k \geq 12$ でカット・オフを A に対して行った結果によるものである。

結論として, 2次元の場合にも, 準安定なエネルギー・スペクトルを持つ波数領域が存在する。即ち, この model では, $1 < k < 3$ に対して, $E(k) \sim k^{-2}$ が準安定である。

Gauss型減衰則が成立するか調べて見よう。波数 $0.5 \leq k \leq 5$ に対して, 準安定スペクトルが成立する時間

$A(k)$ は一定, $F(x) = \exp[2\pi i x] \simeq 1$, よって $L(p, q)$ は
 時間に依りて一定, よして $K^{(1)}$ は無視出来る と思えることか
 出来る。この近似のもとで, §IV の場合と同様に, (3-20) 式
 の t^2 の部分と t^4 の部分の比を調べた。 $t \omega_n = 1$ において,
 Table III より, t^4 の part は t^2 のそれに比べて 21% 以下である。
 又 Table III において, t^4 の部分と t^2 の部分の比が $\frac{1}{4}$ になる
 時刻において, $C^{(1)}(k; k; t)$ は 55% から 38% 減衰するこ
 とがわかる。従って、準安定スピンクトルが成立する時間,
 よして、その波数領域で Gauss 型減衰則が成立すると結論出
 来る。この model における、減衰則の具体的な形は、(3-23)
 (5-5), (5-11) から

$$\begin{aligned} \langle \psi_i(k; t) \psi_j(p; 0) \rangle &\simeq \varepsilon_{i\alpha 3} \varepsilon_{j\beta 3} k_\alpha k_\beta \delta(k_3) \\ &\cdot \delta(k - p) e^{-\frac{1}{2} t^2 \omega_k^2} \end{aligned} \quad (5-24)$$

である。

Table 3

 $k_y = 0$, $t \omega_k = 1$ の時

$$\text{Ratio} = \frac{\left| \frac{t^4}{24} [-2 \omega_k^4 + (AABB)_k] \right|}{\frac{1}{2} t^2 \omega_k^2}$$

k_x	ω_k^2	$(AABB)_k$	Ratio	$C''(k:k)$
0.5	0.089	3.6×10^{-2}	0.21	0.55
1.0	0.52	1.2×10^{-1}	0.13	0.38
2.0	1.6	5.7×10^{-1}	0.15	0.43
3.0	3.6	3.6	0.14	0.42

又 $\text{Ratio} = \frac{1}{4}$ の時. $C''(k:k)$ の減衰率但し $C''(k:k;0) = 1$ に
scale を取っている。

文献

(1) R. H. Cameron and W. T. Martin :

Ann. Math. 48 (1947) 385

(2) T. Imamura, W. C. Meecham and A. Siegel :

J. Math. Phys. 6, 695 (1965)

(3) 今村勤 : 確率場の数学 , 岩波書店

(4) 土井正明・今村勤 : 数理論講究録 (1978)

(5) M. Doi and T. Imamura :

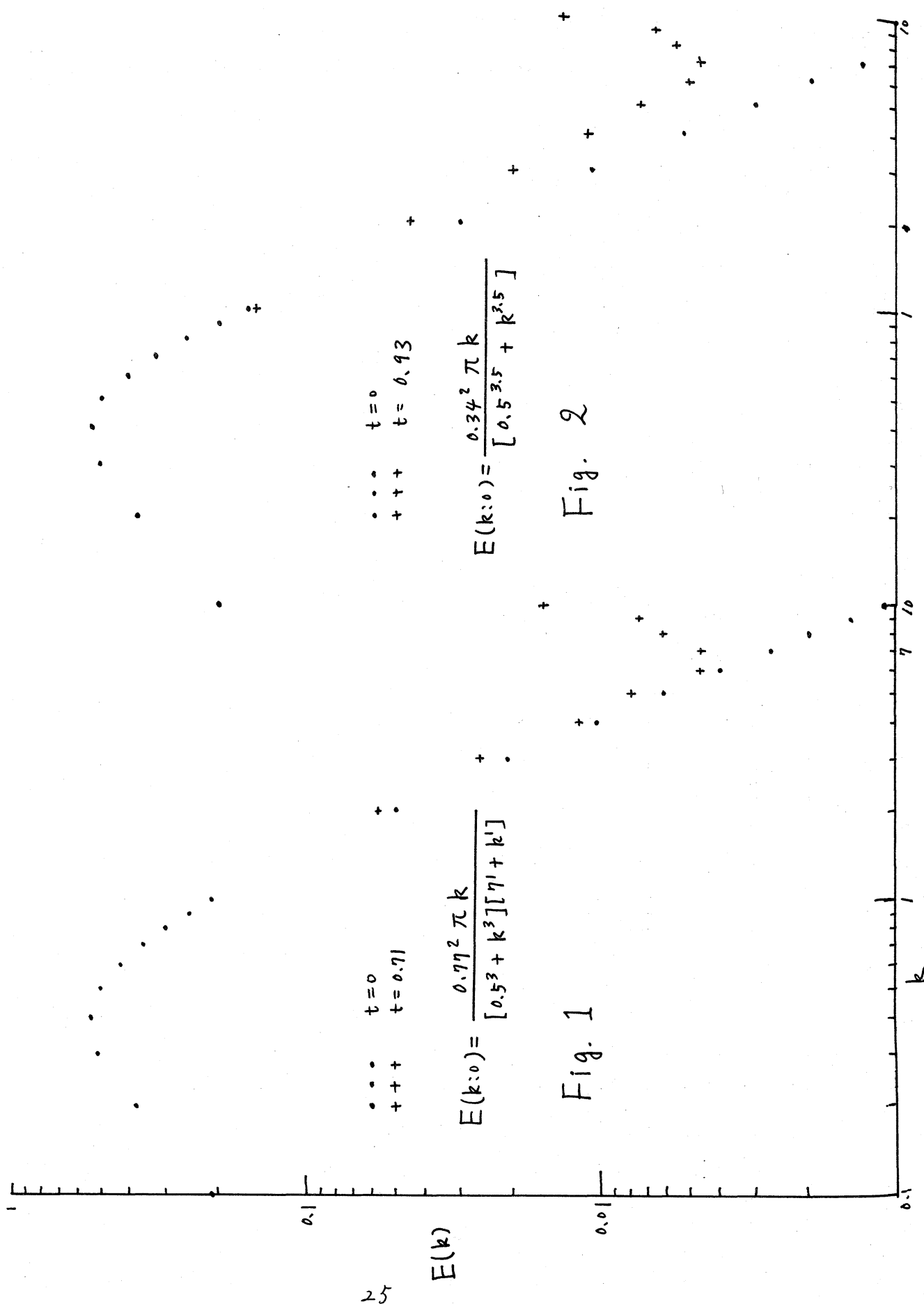
Progr. Theor. Phys. 41 (1969) 358(6) A. Hasegawa & K. Mima : Phys. Rev. Letters 39 (1977) 205(7) A. Hasegawa & K. Mima : Phys. of Fluids 21 (1978) 87

(8) A. Hasegawa, T. Imamura, K. Mima & T. Taniuti :

J. Phys. Soc. Japan 45 (1978) 1005

(9) H. Okuda & J. M. Dawson :

Phys. Fluids 16 (1973) 408



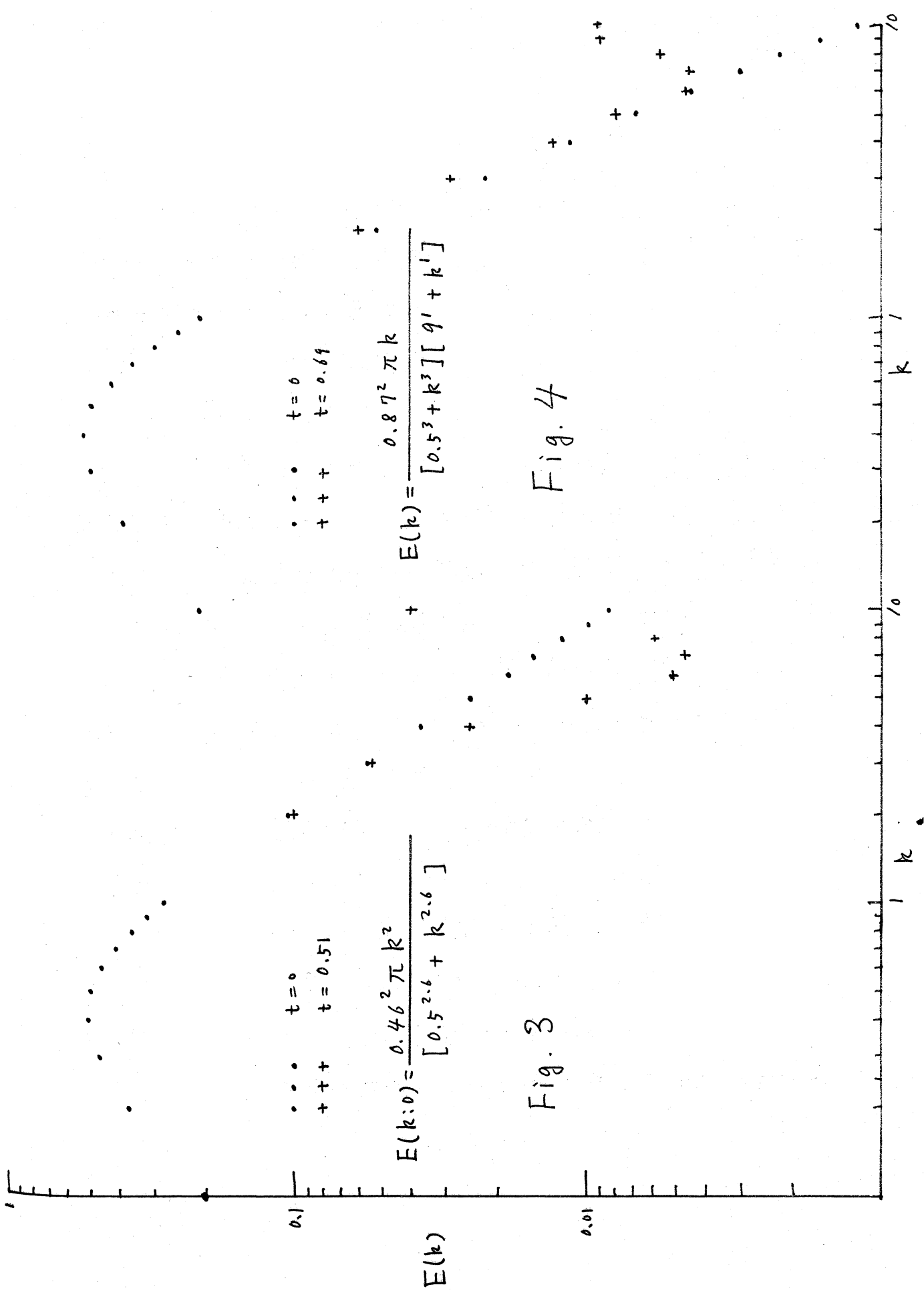


Fig. 3

Fig. 4